

同轴线中分层媒质电特性重建的病态问题研究

赵 翔, 黄卡玛

(四川大学无线电电子学系, 四川成都 610064)

摘 要: 本文研究同轴线中分层媒质电特性重建的病态问题, 对病态出现以及病态加剧的原因进行分析, 指出与改变同轴线终端负载进行多次测量相比, 改变频率多次测量可获得更多有效的信息以确保重建结果的唯一性和改善问题的病态特性. 采用 Levenberg-Marquardt 算法的模拟重建结果证实了这一点. 该结论对实际测量结果重建具有指导意义.

关键词: 分层媒质; 重建; 病态

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 06-0912-04

A Study of Ill-Conditioned Problem in Reconstruction of Layered Medium inside Coaxial Line

ZHAO Xiang, HUANG Kama

(Dept. of Radio Electronics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract: Ill-conditioned problem in reconstruction of layered medium inside coaxial line is considered. The cause of appearance and aggravation of ill-conditionedness is discussed and it is presented that compared with multiple impedance measurements, multiple frequencies measurements are easier to get more effective information so as to ensure the uniqueness of reconstruction solution and weaken the ill-conditionedness. Using Levenberg-Marquardt algorithm, the numerical simulation results confirm this conclusion which can direct the practical reconstruction.

Key words: layered medium; reconstruction; ill-conditioned

1 引言

分层媒质电特性的重建在地质勘探、无损检测和医学成像等工程技术领域具有重要的应用价值, 同时分层媒质电特性的重建作为一类电磁场逆问题也具有十分重要的理论意义. 近几十年来, 人们对电磁场正问题的求解进行了广泛和深入的理论研究, 发展了许多各具特色的解析方法和数值方法, 相比之下, 对逆问题的研究还远不够充分, 缺少相对成熟的理论体系和可靠的算法. 事实上, 作为最基础的一维逆散射问题, 分层媒质电特性重建的研究构成了整个电磁场逆问题研究的有机部分, 同时也有助于更复杂的高维逆散射问题的解决^[1]. 目前分层媒质电特性重建研究的主要困难在于该问题的病态特性, 而且病态随着媒质层数的增加而大幅加剧. 所谓病态是指输入数据的微小扰动会引起解的大变化. 它是问题本身具有的性质, 与算法无关. 从数学上看, 病态产生的原因有二: (1) 解的不唯一. 在该情况下, 问题的条件数可达无穷大^[2]. Weston 等^[3]、Uno 等^[4]与 Ramm^[5]分别研究了分层媒质重建中解的唯一性问题, 实际上就是要解答这样一个问题, 即理论上要完全重建分层媒质电特性, 至少需要多少信息且这

样的信息已经足够; (2) 解的不稳定. 在满足解唯一性的情况下, 解的不稳定直接导致了病态的产生, 使得各种数值求解过程很难收敛, 即使收敛其结果也与真实解相去甚远. 事实上, 这一困难无法克服, 除非通过选择不同的信息以及增加额外的信息来减弱问题病态的程度. 例如 Pienri 等^[6]在对圆柱分层媒质重建时采用多频率测量, 并利用傅立叶变换导出能够进行有效重建的独立数据的最大个数. 此外, 也有研究者采用鲁棒性强的算法如遗传算法来进行重建, 但媒质层数增加导致病态严重, 只有当寻优的区域限制得很小且包含真实解时才可能求得较精确的解^[7], 而缩小寻优区域也就是在解的有界性方面加入更多的信息.

综上所述, 分层媒质重建的一个关键问题是如何获得足够多的有效信息(包括测量信息和先验信息)以减弱问题的病态从而稳定地求得唯一解. 不失一般性, 本文将对同轴线中分层媒质重建(此法常用于生物医学工程中对分层组织作病理分析)的病态问题进行研究. 首先从传输线理论导出的模型出发, 采用数学分析与数值实验相结合的办法对病态出现以及层数增加病态加剧的原因进行研究, 在此基础上, 进一步探讨如何获得更多有效的信息以改善问题的病态特性, 并利用

Levenberg-Marquardt 算法进行了模拟重建. 本文的研究结果对于实际分层媒质电特性重建具有指导意义.

2 问题的数学模型

如图 1 所示, N 层均匀媒质填充于内、外导体半径分别为 a 、 b 的同轴线内 A 、 B 端口之间, 各层厚度为 L_i , 相对复介电常数为 ϵ_{ri} , $i=1, \dots, N$. 设同轴线内传输模式为 TEM 模, 将各层媒质所在的同轴线段等效为特性阻抗不同的均匀传输线, 各段的输入阻抗为 Z_i , 输入端反射系数 Γ_i , 特性阻抗 Z_{0i} , $i=1, \dots, N$. 另外 A 端口接标准负载 Z_L , 该处反射系数为 Γ_L .

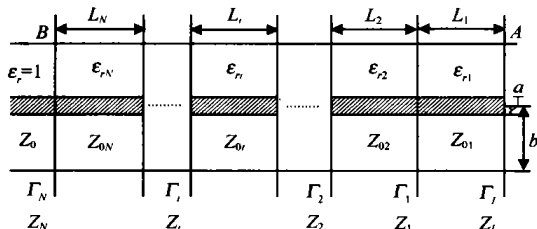


图 1 同轴线中的分层媒质

根据传输线理论与同轴线理论, 可以得到如下模型:

$$Z_i = Z_{0i} \frac{Z_{i-1} + Z_{0i} \tanh(\Gamma_i L_i)}{Z_{0i} + Z_{i-1} \tanh(\Gamma_i L_i)} \quad (1)$$

$$\Gamma_i = 2Pf \sqrt{-\epsilon_{ri} E_0 L_0} \quad (2)$$

$$Z_{0i} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{ri}}} \ln \frac{b}{a} \quad (3)$$

$$\Gamma_N = \frac{Z_N - Z_0}{Z_N + Z_0} \quad (4)$$

特别地

$$Z_1 = Z_{01} \frac{Z_L + Z_{01} \tanh(\Gamma_1 L_1)}{Z_{01} + Z_L \tanh(\Gamma_1 L_1)} \quad (5)$$

其中 Γ_i 为第 i 段传播常数, f 为频率.

上面式(1~5)确定了 Γ_N 与 f 、 Z_L 、 ϵ_{ri} 、 L_i 之间的多元函数关系, 将其简写为

$$\Gamma_N = \Gamma(f, Z_L, \epsilon_{r1}, \dots, \epsilon_{rN}, L_1, \dots, L_N) \quad (6)$$

则该重建问题描述为: 已知若干不同条件下(例如 f 不同或者 Z_L 不同)的 Γ_N 的值, 求各层媒质的 ϵ_{ri} (某些更复杂的情况下, 还需求 L_i), $i=1, \dots, N$. 例如已知 Z_L 以及各层媒质厚度 L_i , 在 $M(M \geq N)$ 个频率 $f_1, f_2, \dots, f_M$ 下测量 Γ_N 的值 $\Gamma_N^{(k)}$, $k=1, 2, \dots, M$, 且令

$$\Gamma_N^{(k)}(\epsilon_{r1}, \dots, \epsilon_{rN}) = \Gamma(f_k, Z_L, \epsilon_{r1}, \dots, \epsilon_{rN}, L_1, \dots, L_N), k=1, 2, \dots, M$$

则问题归结为一组非线性方程组

$$\begin{cases} \Gamma_N^{(1)}(\epsilon_{r1}, \dots, \epsilon_{rN}) = \Gamma_N^{(1)} \\ \Gamma_N^{(2)}(\epsilon_{r1}, \dots, \epsilon_{rN}) = \Gamma_N^{(2)} \\ \vdots \\ \Gamma_N^{(M)}(\epsilon_{r1}, \dots, \epsilon_{rN}) = \Gamma_N^{(M)} \end{cases} \quad (7)$$

3 解的唯一性讨论及数值实验

在该重建问题中, 若干不同条件下的 Γ_N 值是输入数据,

各层媒质的 ϵ_{ri} 是待求的解, 则问题的病态是指 Γ_N 的一个较小变化导致 ϵ_{ri} 的较大变化. 如前所述, 下面首先讨论病态原因之一: 解的非唯一性.



图 2 数值实验用例之一

实际上, 解的非唯一性主要是因为输入数据与解的非线性关系造成. 图 3 显示了 7527 型标准同轴线填充单层媒质情况下(如图 2(a)), 频率 210GHz, 负载阻抗 $j80.08$ 时 Γ_N 与 ϵ_{r1} 之间的强烈的非线性关系.

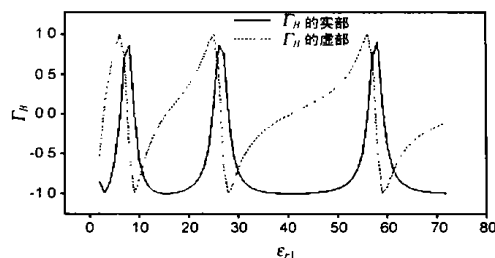


图 3 Γ_N 与 ϵ_{r1} 之间的非线性关系

可以看出仅有这样一次测量数据, 不可能唯一确定媒质的介电常数, 例如无法区分介电常数为 11、30 及 62 的情况. 因此, 要保证解的唯一性必需增加信息. 实际测量中可行办法是改变频率或者改变负载阻抗进行多次测量. 图 4 所示的数值模拟结果对改变频率(频率变化范围为 1.0GHz~4.8GHz, 负载阻抗为 $j80.08$)和改变负载阻抗(负载阻抗变化范围为 $-j5008 \sim j5008$, 频率为 210GHz)两种方式对反射系数实部的影响进行了比较. 显然两种方式对反射系数的影响大不相同. 例如, 要区分介电常数 27 与 58, 从图 4(a)中可知只需在频率 210GHz 和 3.0GHz 测量, 而图 4(b)却显示: 在整个负载阻抗变化范围内, 介电常数为 27 与 58 时的反射系数都近乎相同. 即无论如何改变负载阻抗进行测量都难以确定介电常数是 27 还是 58. 这并不是一个偶然情况, 其根本原因是图 4(b)中反射系数在纵向缺少变化. 由此可见, 在单层媒质的情况下, 改变频率进行多次测量比改变负载阻抗更易确保解的唯一性, 或者说, 改变频率能够比改变负载阻抗获得更有效信息. 模拟重建结果证实了该结论也可以推广到多层媒质的情形.

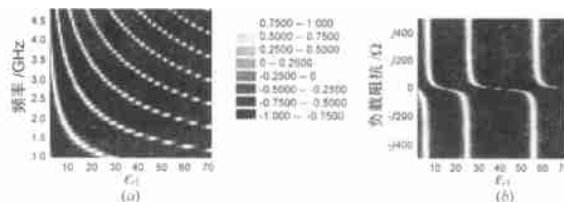


图 4 单层媒质情况下 (a) 改变频率与 (b) 改变负载阻抗对反射系数实部影响的比较

4 病态问题研究

要了解该重建问题的病态程度, 可以研究第 i 层 ϵ_{ri} 变化

\$E_i\$ 和相应的 \$\#_N\$ 变化 \$\#_N\$ 之间的关系。

4.1.1 数学分析

由于 \$\#_N, E_i\$ 均为复数, 需要具体研究 \$\#_N\$ 的实部 \$\#_{N实}\$、虚部 \$\#_{N虚}\$ 变化和 \$E_i\$ 实部 \$E_{i实}\$、虚部 \$E_{i虚}\$ 变化之间的关系, 即研究 \$\frac{\partial \#_{N实}}{\partial E_{i实}}\$、\$\frac{\partial \#_{N虚}}{\partial E_{i实}}\$ 和 \$\frac{\partial \#_{N实}}{\partial E_{i虚}}\$、\$\frac{\partial \#_{N虚}}{\partial E_{i虚}}\$ 的特性。由于式 (6) 式中的函数 \$\#_N\$ 是由有理分式函数与双曲函数等初等解析函数复合而成, 故

该函数是解析函数^[8], 即 \$\frac{\partial \#_N}{\partial E_i} = \lim_{\Delta E_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \#_N}{\Delta E_i}\$ 存在

$$\left(\frac{\partial \#_N}{\partial E_i} \right)_{实} = \frac{\partial \#_{N实}}{\partial E_{i实}}, \left(\frac{\partial \#_N}{\partial E_i} \right)_{虚} = - \frac{\partial \#_{N虚}}{\partial E_{i虚}} \quad (8)$$

且满足 C.-R. 条件

$$\frac{\partial \#_{N实}}{\partial E_{i实}} = \frac{\partial \#_{N虚}}{\partial E_{i虚}}, \frac{\partial \#_{N虚}}{\partial E_{i实}} = - \frac{\partial \#_{N实}}{\partial E_{i虚}} \quad (9)$$

故直接求 \$\frac{\partial \#_N}{\partial E_i}\$ 是可以的, 同时也可以很方便地得到 \$\frac{\partial \#_{N实}}{\partial E_{i实}}\$、

\$\frac{\partial \#_{N虚}}{\partial E_{i实}}\$、\$\frac{\partial \#_{N实}}{\partial E_{i虚}}\$ 和 \$\frac{\partial \#_{N虚}}{\partial E_{i虚}}\$。

4.1.2 求导公式

利用求复合函数偏导数的链式法则可得

$$\frac{\partial \#_N}{\partial E_i} = \frac{\partial \#_N}{\partial Z_N} \# \frac{\partial Z_N}{\partial Z_{N-1}} \# \frac{\partial Z_{N-1}}{\partial Z_{N-2}} \# \dots \# \frac{\partial Z_{i+1}}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial E_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

其中

$$\frac{\partial \#_N}{\partial Z_N} = \frac{2Z_0}{(Z_N + Z_0)^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial Z_m}{\partial Z_{m-1}} = \frac{1 - \text{th}^2(C_m L_m)}{\left[1 + \frac{Z_{m-1}}{Z_{0m}} \text{th}(C_m L_m) \right]^2}, m = i+1, i+2, \dots, N \quad (12)$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial E_i} = \left[\frac{\partial Z_i}{\partial Z_{0i}} \# \frac{\partial Z_{0i}}{\partial C_i} + \frac{\partial Z_{0i}}{\partial \text{th}} \# \frac{\partial \text{th}}{\partial C_i} \right] \# \frac{\partial C_i}{\partial E_i}, \text{ 其中 } \text{th} = \text{th}(C_i L_i) \quad (13)$$

4.1.3 数值实验及分析

以下数值实验均采用 7527 型标准同轴线的尺寸及相关参数。此外, 由于实际测量中常采用滑动短路器作为终端负载, 数值实验中的负载阻抗值均取为纯虚数。

4.1.3.1 对媒质层数分别为 1、2、3 层的情况进行比较

计算用例如图 2 所示, 频率为 31.0GHz, 负载阻抗 \$j2108\$。

图 5 表示了三种情况下 \$\frac{\partial \#_{B实}}{\partial E_{i实}}\$ 随 \$E_{i实}\$ 变化的结果。总体上看,

层数越多, \$\frac{\partial \#_{B实}}{\partial E_{i实}}\$ 的幅值普遍越小, 病态普遍越严重。从物理意

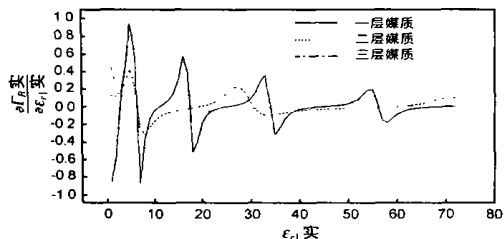


图 5 图 2 所示的三种情况比较

义上可以很容易理解该结果。随着层数的增加, 各媒质分界面处的反射累计增加, 使得从最后一层媒质反射回的信号在总反射中的比例减小。从总反射中反演最后一层媒质的电特性, 其稳定性必然较差。

4.1.3.2 对负载阻抗变化和频率变化的情况进行比较

在媒质层数为 3 层的情况 (如图 6 所示) 下分别比较负载阻抗变化 (频率为 31.0GHz) 和频率变化 (负载阻抗 \$j10108\$) 对

\$\frac{\partial \#_{B实}}{\partial E_{i实}}\$、\$\frac{\partial \#_{B实}}{\partial E_{i虚}}\$ 和 \$\frac{\partial \#_{B实}}{\partial E_{i3实}}\$ 的影响,

计算结果如图 7 所示。可以看到, 图 7(b) 曲线在负载阻抗从 \$-j500108\$ 到 \$j500108\$ 的范围

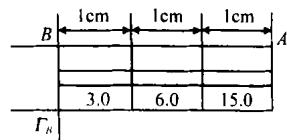


图 6 数值实验用例之二

内仅有两个极值点, 而图 7(a) 曲线在频率范围 11.0GHz~41.8GHz 内存在四个极值点。实际上, 极值点位置暗示了测量的最佳位置, 因为在这些点上反射系数随介电常数变化明显, 使用在这些位置上得到的测量信息来进行重建计算可以获得相对快速的收敛。此外图 7(a) 曲线的幅值普遍高于图 7(b), 说明与改变负载阻抗相比, 改变频率所测的信息将使重建计算收敛较快, 模拟重建结果证实了这一点。

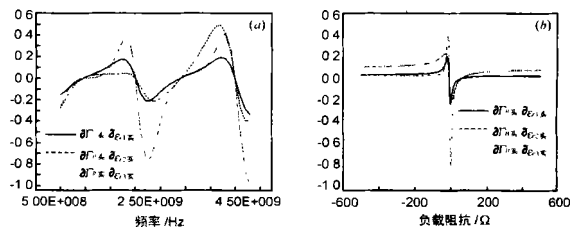


图 7 比较(a)频率变化和(b)负载阻抗变化两种情况

5 模拟重建

5.1.1 Levenberg-Marquardt 算法

如前所述该重建问题描述为形如式(7)的非线性方程组, 将其转化为非线性最小二乘问题

$$\min F \quad (14)$$

其中

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [\#^{(i)}(E_{i1}, \dots, E_{iN}) - \#^{(i)}]^2 \quad (15)$$

采用 Newton 类迭代算法 Levenberg-Marquardt 算法求解, 该算法的迭代过程为

$$[E_i]^{(i+1)} = [E_i]^{(i)} + (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T [\#] \quad (16)$$

其中 \$\lambda\$ 为正则化参数, \$I\$ 为 \$N \times N\$ 阶单位矩阵, \$J\$ 为 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \#^{(1)}}{\partial E_{i1}} & \frac{\partial \#^{(1)}}{\partial E_{i2}} & \dots & \frac{\partial \#^{(1)}}{\partial E_{iN}} \\ \frac{\partial \#^{(2)}}{\partial E_{i1}} & \frac{\partial \#^{(2)}}{\partial E_{i2}} & \dots & \frac{\partial \#^{(2)}}{\partial E_{iN}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \#^{(M)}}{\partial E_{i1}} & \frac{\partial \#^{(M)}}{\partial E_{i2}} & \dots & \frac{\partial \#^{(M)}}{\partial E_{iN}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[E_j] = (E_{j1}, E_{j2}, \dots, E_{jN})^T$$
$$[\#] = (\#_N^{(1)}, \#_N^{(2)}, \dots, \#_N^{(M)})^T$$

该算法采用正则化方法处理矩阵 JJJ 条件数过大(病态)的问题。实际上 JJJ 的病态是由非线性方程组本身的病态遗传而来。

5.1.2 模拟重建

本小节使用 Levenberg-Marquardt 算法在两种条件下对图 6 所示的分层媒质进行模拟重建。条件 1: 在 1.0GHz~41.8GHz 频率范围内的 20 个频率点(负载阻抗 j10108)测量 B 端口反射系数,条件 2: 在 -j258~j158 的负载阻抗范围内的 20 个点(频率为 31.0GHz)测量 B 端口反射系数。

表 1 迭代初始值为(1010, 910, 610)时条件 1、2 的重建结果比较

模拟测量条件	重建结果(各层介电常数)	F 的值	迭代次数
条件 1	(151 0, 610, 31 0)	010	7
条件 2	(9126, 71 37, 51 22)	010	6

表 2 迭代初始值为(1010, 710, 510)时条件 1、2 的重建结果比较

模拟测量条件	重建结果(各层介电常数)	F 的值	迭代次数
条件 1	(151 0, 610, 31 0)	010	5
条件 2	(151 0, 610, 31 0)	010	9

表 1 和表 2 显示了不同初始值时条件 1、2 的重建结果比较。表 1 中条件 1 准确收敛到真实解(1510, 610, 310), 而条件 2 收敛到另一个解(9126, 71 37, 51 22), 该解仍使 F 取到极小值 010, 显然使用条件 2 无法保证解的唯一性, 即改变负载阻抗多次测量所得数据很难提供足够的有效信息量以确保获得唯一的重建结果。表 2 中条件 1、2 均收敛到真实解, 但条件 1 所需的迭代次数更少, 即条件 1 提供了更快的收敛速度。

考虑到局部搜索的迭代法受初始值影响较大, 本文在更大范围内对不同初始值的情形进行重建结果的统计比较(表 3), 比较结果表明上述结论仍然成立。

表 3 8000 种初始值(i, j, k), i, j, k = 1, 2, ..., 20 重建结果的统计比较

模拟测量条件	收敛到真实解(151 0, 61 0, 31 0)的次数	收敛到其他极小解的次数	100 次迭代后不收敛的次数	平均迭代次数
条件 1	2245	0	5755	6
条件 2	1141	2636	4223	9

给数据加上 5~10% 的误差后, 重建结果不理想, 这仍然归因于问题的病态, 我们认为只有通过增加更多有效信息(如解的有界性等)以及采用鲁棒性更强的算法来解决。此外, 通过进一步分析, 我们发现当相邻媒质层的特性参数彼此非常接近或厚度太小从而难于分辨时, 在数学上表现为 Jacobi 矩

阵的列向量近乎相关; 当若干次测量数据(例如在不同频率下或在不同负载阻抗下测量)在物理上相关则会导致 Jacobi 矩阵的行向量近乎相关。这两种情况均会导致 Jacobi 矩阵近乎奇异从而条件数接近无穷大。前一种情况若出现则是一种客观实际, 而后一种情况则可在一定程度上进行人为的控制。

6 结论

本文通过数值实验解释了同轴线中分层媒质电特性重建时媒质层数增加病态加剧的原因, 对比了不同测量条件(在不同频率下或在不同负载阻抗下测量)所得测量信息在保证重建结果的唯一性和减弱问题病态程度两方面的性能。数值结果表明改变频率进行多次测量比改变负载阻抗所得信息更易确保唯一性且所得问题的病态程度更弱。该结论对于有效地解决分层媒质重建中的病态问题具有指导作用。

以上分析也适合许多其他分层媒质重建问题, 因为这些问题大多也可采用类似的数学模型。此外, 分层媒质重建问题作为一类逆问题, 上述分析也暗示了: 如何获得足够多的有效信息是求解逆问题的关键。而这与采用何种算法无关。

参考文献:

[1] 史小卫. 分层媒质的剖面重建[J]. 电子学报, 1995, 23(10): 169 - 174.

[2] D Kincaid, W Cheney. Numerical Analysis [M]. Brooks/ Cole Publishing Company, 1990.

[3] V H Weston, R J Krueger. On the inverse problem for a hyperbolic dispersive partial differential equation [J]. Journal of Mathematical Physics, 1973, 14(3): 406- 408.

[4] T Uno, S Adachi. Inverse scattering method for one-dimensional inhomogeneous layered media [J]. IEEE Trans Antenna & Propagat, 1987, 35(12): 1456- 1466.

[5] A G Ramm. Inversion of fixed-frequency surface data for layered medium [J]. Inverse and Ill-posed Problem, 1994, 2(3): 263- 268.

[6] R Pierri, A Brancaccio, F De Blasio. Multifrequency dielectric profile inversion for a cylindrically stratified medium [J]. IEEE Trans Geoscience & Remote Sensing, 2000, 38(4): 1716- 1724.

[7] 马国田, 梁昌洪. 分层媒质复介电常数测量的一种方法[J]. 微波学报, 2000, 16(2): 122- 125.

[8] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.

作者简介:

赵翔女, 1973 年生于四川乐山, 1994 年、1997 年分别在四川大学数学系和无线电系获得学士、硕士学位, 现为生物医学工程专业博士生, 研究方向包括: 生物医学成像、逆散射问题及其应用、电磁场生物效应。

黄卡玛男, 1964 年生于重庆, 1991 年电子科技大学毕业, 获博士学位, 现为四川大学电子信息学院院长、教授、博士生导师, 研究方向包括: 电磁场生物效应、微波生物医学工程、微波化学和电磁兼容。